TALLER PSU MATEMÁTICA CUARTO MEDIO
Colegio Alborada
Profesor Jaime Rios Obando

EJE TEMÁTICO NÚMEROS
TEMA 3: POTENCIAS DE BASE RACIONAL Y EXPONENTE ENTERO

CONCEPTO 1

Si **a** es un número racional y **n** es un número entero positivo, entonces se tienen las siguientes definiciones:

1) $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^{n+1} = a^n \cdot a$ 4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

OBSERVACIONES:

1) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ 2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a, b \neq 0$ 3) 0^0 y 0^n con $n < 0$, no están definidos

4) Si **b** es un número entero positivo, entonces:
   - $(-b)^{2n} = b^{2n}$ (toda potencia de exponente par tiene base no negativa).
   - $(-b)^{2n-1} = -b^{2n-1}$ (toda potencia de exponente impar tiene el signo de la base).

5) b^n con $b > 0$ es **siempre** positiva.

EJEMPLO DESARROLLADO

$(2,5)^{-2} =$

Solución:

Conviene transformar 2,5 en fracción: $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

A continuación, elevando a -2 se tiene $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$ que es lo mismo que $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0,16$

01

¿Cuál de las siguientes fracciones es equivalente a $(0,6)^{-2}$?

A) $-\frac{9}{25}$

B) $\frac{9}{25}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{9}{5}$

E) $\frac{25}{9}$

02

¿Cuál es el valor de t^{-3} si $t = \frac{1}{3}$?

A) 27

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{27}$

D) $-\frac{1}{27}$

E) $-\frac{1}{3}$

CONCEPTO 2

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Si **a** es un número racional distinto de cero, y **m** y **n** son números enteros, entonces:

$$\boxed{\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}}$$

por lo tanto, para dividir potencias de igual base, se eleva la base a la diferencia de los exponentes.

También funciona en el otro sentido: $\boxed{\mathbf{a^{m-n} = a^m : a^n}}$

Es decir, "una potencia cuyo exponente es una diferencia, es igual a un cuociente de potencias de igual base, en el cual el dividendo tiene de exponente el minuendo y el divisor el sustraendo".

EJEMPLO DESARROLLADO

$7^7 : 7^9 =$

Solución:
Se conserva la base y se restan los exponentes $7^7 : 7^9 = 7^{(7-9)} = 7^{-2}$

Además, como es una potencia con exponente negativo se puede escribir $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{7^2}$

01

$\frac{3^4}{3^4} =$

A) 0
B) 1
C) 3
D) 3^8
E) 9^8

02

$3^{-3} : 9 : 3^5 =$

A) -3
B) 3^4
C) 3^8
D) 3^{-10}
E) 3^6

CONCEPTO 3

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

Si **a** es un número racional distinto de cero, y **m** y **n** son números enteros, entonces:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

esto es, "para multiplicar potencias de igual base, se eleva la base a la suma de los exponentes".

Como al conmutar una igualdad (cambiar el orden de sus miembros), la igualdad subsiste, entonces de lo anterior se tiene que:

$$\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$$

o sea "una potencia cuyo exponente es una suma, es igual a un producto de potencias de igual base que tiene de exponentes los sumandos respectivamente".

EJEMPLO DESARROLLADO

El producto $5^2 \cdot 5$ es igual a

Solución:

$5^2 \cdot 5 = 5^2 \cdot 5^1 = 5^{2+1} = 5^3$

01

Si se multiplica 3^{56} por 3^{-5}, se obtiene

A) 3^5
B) 3^6
C) 3^{45}
D) 3^{55}
E) 3^{51}

02

Otra forma de escribir 11^4 es

A) $11^2 \cdot 11^3$
B) $11^1 \cdot 11^1 \cdot 11^2$
C) $11^{10} \cdot 11^{-4}$
D) $11^{4 \cdot 2}$
E) 11^{8-2}

CONCEPTO 4

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Si **a** y **b** son números racionales distintos de cero y **m** es un número entero, entonces:

$$\boxed{\mathbf{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}}$$

Esto es, "en la multiplicación de potencias de igual exponente, se eleva el producto de las bases al exponente común".

$$\boxed{\mathbf{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}}$$

Podemos decir que, "para elevar a un exponente un producto, se eleva cada uno de los factores y se multiplican las potencias que resultan".

EJEMPLO DESARROLLADO

Si se sabe que $A = 2 \cdot 3$ y $B = 36$, exprese el producto $A \cdot B$, en bases 2 y 3.

Solución:

Como $A = 2 \cdot 3$, se deja igual. Como $B = 36$, entonces se hace $36 = 6^2 = (2 \cdot 3)^2$

Aplicando producto de potencias de igual exponente se tiene que:

$A \cdot B = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3)^2 = 2 \cdot 3 \cdot (2^2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^3$

01

¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) igual(es) a 2^6?

I) 4^3
II) $(2^3)^2$
III) $4^{-1} \cdot 4^4$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

02

$(5 \cdot 12)^{-3} \cdot 4^3 =$

A) 15^{-6}
B) $2 \cdot 15^{-3}$
C) 15^{-3}
D) 15
E) 15^6

CONCEPTO 5

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Si **a** y **b** son números racionales distintos de cero y **m** es un número entero, entonces:

$$\frac{\mathbf{a}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{m}}} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m}}$$

Por tanto, "en la división de potencias de igual exponente, se eleva el cuociente de las bases al exponente común".

Análogamente, "para elevar a un exponente un cuociente o una fracción, se eleva cada uno de sus términos y se dividen las potencias que resultan en el mismo orden".

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{m}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{m}}}$$

EJEMPLO DESARROLLADO

Desarrolle el cubo de 0,75, expresándolo en forma fraccionaria

Solución:

$$0{,}75^3 = \left(\frac{75}{100}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$$

01

$$\frac{12^5}{3^5} =$$

A) 4^5
B) 4
C) 5
D) 20
E) 24

02

$$\frac{x^5 \cdot y}{x \cdot y^5} =$$

A) $(xy)^4$
B) $\left(\frac{y}{x}\right)^4$
C) $\left(\frac{x}{y}\right)^4$
D) $\left(\frac{x}{y}\right)^6$
E) $(xy)^6$

CONCEPTO 6

POTENCIAS DE IGUAL BASE

Si **a** es un número racional distinto de -1, de 0 y de 1 y **m** y **n** son números enteros, entonces:

$$\boxed{\mathbf{a^m = a^n \ \Rightarrow m = n}}$$

OBSERVACIÓN:

Esta propiedad es muy importante por su uso en resolución de ecuaciones exponenciales.

POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Si **a** y **b** son números racionales distintos de cero y **n** es un entero positivo, entonces:

$$\boxed{\mathbf{a = b \ \Rightarrow a^n = b^n}}$$

EJEMPLO DESARROLLADO

¿Cuál es el valor de n si se sabe que $3^{2n-1} - 3^5 = 0$?

Solución:

Reordenando $3^{2n-1} = 3^5$, luego se cumple que: $2n - 1 = 5$.

Despejando **n** se tiene $2n = 6$, por lo tanto, $n = 3$.

01

Si 3^x es igual a $(3^2)^{-1}$, entonces **x** es igual a

A) -9
B) -2
C) $\frac{1}{9}$
D) 2^{-3}
E) 2

02

¿Cuánto vale **m** si $0{,}125^m = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-m}$?

A) -1
B) $-\frac{1}{2}$
C) 0
D) $\frac{1}{2}$
E) 1

CONCEPTO 7

POTENCIA DE UNA POTENCIA

Si **a** es un número racional distinto de cero, **m** y **n** son números enteros, entonces:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Es decir, "para elevar a un exponente una potencia, se eleva la base al producto de los exponentes".

De lo anterior, se deduce que: "para elevar un número a un exponente que es un producto, se eleva sucesivamente a cada uno de los factores en cualquier orden".

EJEMPLO DESARROLLADO

Si se multiplica $(K^4)^2$ por K^3 se obtiene

Solución:

$(K^4)^2 \cdot K^3 = K^8 \cdot K^3 = K^{11}$

01

$2^3 \cdot [(2^2)^2]^5 =$

A) 2^{12}
B) 2^{17}
C) 2^{23}
D) 2^{27}
E) 2^{60}

02

$(a^3 \cdot b^{-2})^{-2} =$

A) $\frac{a}{b^4}$

B) $\frac{1}{a^2b}$

C) $\frac{b^4}{a^6}$

D) a^2b

E) $\frac{a^6}{b^4}$

EJERCICIOS SELECCIÓN MULTIPLE

01

$$\left[1\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right]^0 =$$

A) 1
B) 2
C) 0
D) -1
E) No está determinado

02

$$2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 2^{-4} =$$

A) 2^{24}
B) 2^{10}
C) 2^{16}
D) -2^{10}
E) 2^6

03

La expresión $\frac{13^5}{13^3}$ también se puede escribir como

A) 13^1
B) 13^2
C) $13^{\frac{5}{3}}$
D) 13^8
E) 13^{15}

04

¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) igual(es) a $2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^2$?

I) $6^5 \cdot 3^2$
II) $2^5 \cdot 3^7$
III) $6^2 \cdot 3^5 \cdot 2^3$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

05

Si $t^3 = 4$, entonces $t^6 =$

A) 2
B) 8
C) 12
D) 16
E) 64

06

Sea **t = 11**, entonces ¿cuál es el valor de $\dfrac{t(t^2)^4}{(t^3)^3}$?

A) $\dfrac{11}{9}$
B) 0
C) 1
D) $\dfrac{9}{11}$
E) 11

07

$$\left(\frac{3^2}{4}\right)^{-5} =$$

A) 2^5
B) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-10}$
C) $\dfrac{4}{3}$
D) $\dfrac{1}{4}$
E) $3^{-10}\,2^{10}$

08

$$\frac{5^{m+n}}{5^{m-n}} =$$

A) 5^0
B) 5^{-1}
C) 5^{2n}
D) 5^{-2n}
E) 5^{2m}

09

Si $\left(\frac{1}{2} \cdot n\right)^2 = \frac{1}{4}$, entonces n^2 =

A) 4^{-2}
B) 4^{-1}
C) 4^{0}
D) 4^{1}
E) 4

10

Si $x - (51^3)^4 = 0$, ¿cuál es el valor de **x**?

A) -51^{12}
B) 51^{7}
C) 51^{12}
D) $4 \cdot 51^{3}$
E) $4 \cdot 51^{12}$

11

Si **n** es un número entero positivo, entonces ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\frac{n^{100}}{n^{99}} = 1$

II) $(n^n)^2 = n^{n^2}$

III) $\left(\frac{n}{n}\right)^{99} = \left(\frac{n+1}{n+1}\right)^{100}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas

12

$\frac{5^2 \cdot 2^{-3} \cdot 3^2}{10^3 \cdot 3^{-4}} =$

A) $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^6$

B) $\left(\frac{3}{10}\right)^6$

C) $\left(\frac{15}{2}\right)^6$

D) 30^6

E) $5\left(\frac{3}{2}\right)^6$

13

Si $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (27)^3 = \frac{3^{x+1}}{9}$, entonces el valor de x es

A) 10
B) 9
C) 8
D) 7
E) 6

14

Si se multiplica $-2a^3b$ por $-5a^3b^2c$, se obtiene

A) $-10a^6b^3c$
B) $-10a^6b^2c$
C) $10a^9b^2c$
D) $10a^9b^3c$
E) $10a^6b^3c$

15

Si **a** y **b** son números enteros positivos (naturales), entonces $3^{a+b} \cdot 6^a$ es igual a

A) 18^{2a+b}
B) $18^{a(a+b)}$
C) $3^{6(2a+b)}$
D) $9^{a+b} \cdot 2^a$
E) $3^{2a+b} \cdot 2^a$

16

$$\frac{\left(2^3\right)^4 \cdot 2^{-5}}{4^2} =$$

A) 16
B) 8
C) $\frac{1}{16}$
D) 16
E) -8